UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PURAS Y APLICADAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICA I

Matemática I (MA1111) **Primer Parcial (30 ptos)**

Septiembre - Diciembre 2024

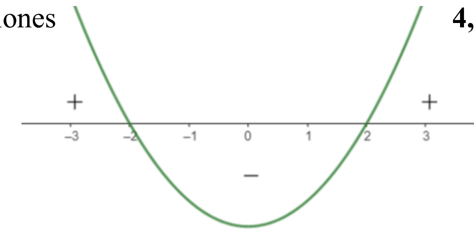
Modelo A – Solución Propuesta por Profesor Rojas Albert

Nota

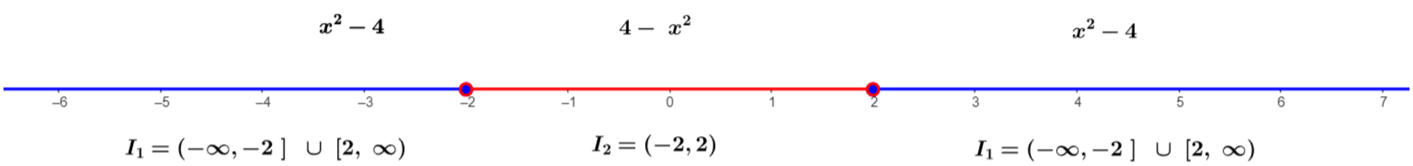
$\overline{}$
30

Problema 1. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones **4,5 ptos c/u = 9ptos**

a. $\frac{|x^2-4|}{x} \leq 3$



Definimos $|\boldsymbol{x^2-4}| = \begin{cases} x^2-4, & si \quad x^2-4 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \in (-\infty,-2] \cup [2,\infty) \\ 4-x^2, & si \quad x^2-4 < 0 \quad \rightarrow \quad x \in (-2\,,2) \end{cases}$



Estudiamos cada intervalo de la recta

Caso 1: $I_1 = (-\infty,-2\,] \cup [\,2,\infty)$ $\quad \frac{x^2-4}{x} \leq 3 \rightarrow \frac{x^2-4}{x} - 3 \leq 0 \rightarrow \frac{x^2-3x-4}{x} \leq 0$

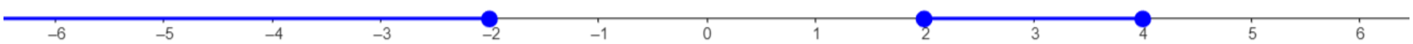
$\rightarrow \frac{(x-4)(x+1)}{x} \leq 0 \qquad x-4=0 \rightarrow \boldsymbol{x=4} \qquad x+1=0 \rightarrow \boldsymbol{x=-1} \qquad x \neq 0$

Estudiamos el signo

	$-\infty$	-1	0	4 $\quad \infty$
$x-4$	-	-	-	+
$x+1$	-	+	+	+
x	-	-	+	+
$\frac{(x-4)(x+1)}{x}$	-	+	-	+

Luego, la solución de este caso particular 1 será: $Solp_1 = (-\infty, -1] \cup (0, 4]$

Por tanto, la solución para este intervalo de estudio viene dado por: $Sol_1 = Solp_1 \cap I_1 = (-\infty, -2] \cup [2, 4]$



Caso 2: $I_2 = (-2,\ 2)$ $\quad \frac{4-x^2}{x} \leq 3 \ \rightarrow \ \frac{4-x^2}{x} - 3 \leq 0 \ \rightarrow \ \frac{4-x^2-3x}{x} \leq 0 \ \rightarrow \ \frac{x^2+3x-4}{x} \geq 0$

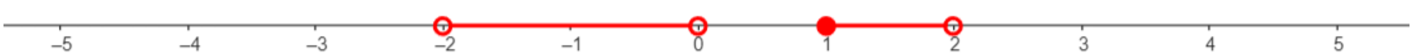
$\rightarrow \ \frac{(x+4)(x-1)}{x} \geq 0 \qquad x + 4 = 0 \ \rightarrow \ \boldsymbol{x = -4} \qquad x - 1 = 0 \ \rightarrow \ \boldsymbol{x = 1} \qquad x \neq 0$

Estudiamos el signo

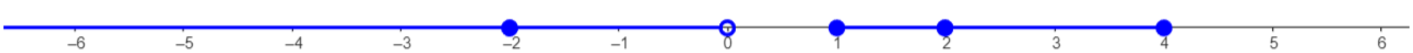
	$-\infty$ $\quad$ $\mathbf{-4}$	0	$\mathbf{1}$	∞
$x+4$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	-	+
x	-	-	+	+
$\frac{(x+4)(x-1)}{x}$	-	+	-	+

Luego, la solución de este caso particular 2 será: $Solp_2 = [-4, 0) \cup [1, \infty)$

Por tanto, la solución para este intervalo de estudio viene dado por: $Sol_2 = Solp_2 \cap I_2 = (-2, 0) \cup [1, 2)$



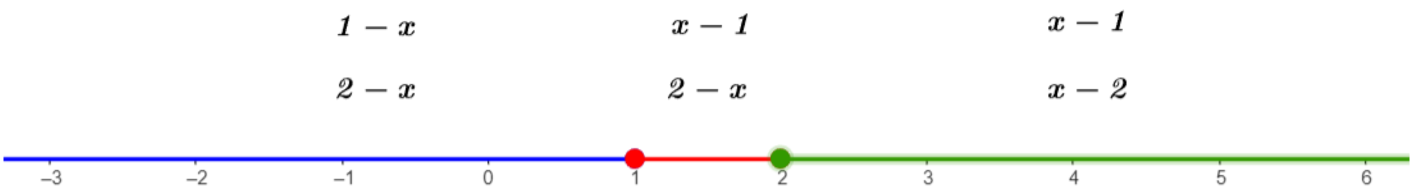
Luego, **la solución final viene dada por** $\boldsymbol{Solf = Sol_1 \cup Sol_2 = (-\infty, 0) \cup\ [1, 4]}$



b. $\frac{1}{1+|x-1|} < |x-2|$

Definimos $\quad \boldsymbol{|x-1|} = \begin{cases} x-1, & si \quad x-1 \geq 0 \ \rightarrow \ x \in [1, \infty) \\ 1-x, & si \quad x-1 < 0 \ \rightarrow \ x \in (-\infty\,, 1) \end{cases}$

$$|\boldsymbol{x-2}| = \begin{cases} x-2, & si \quad x-2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \in [2, \infty) \\ 2-x, & si \quad x-2 < 0 \quad \rightarrow \quad x \in (-\infty\,, 2) \end{cases}$$



$I_1 = (-\infty, 1)$ $\qquad$ $I_2 = [1, 2)$ $\qquad$ $I_3 = [2, \infty)$

Caso 1: $\quad I_1 = (-\infty, 1) \qquad \frac{1}{1+1-x} < 2-x \;\rightarrow\; \frac{1}{2-x} - (2-x) < 0 \;\rightarrow\; \frac{1-(2-x)^2}{2-x} < 0$

$$\rightarrow \frac{(1+2-x)(1-2+x)}{2-x} < 0 \;\rightarrow\; \frac{(3-x)(-1+x)}{2-x} < 0$$

$3-x \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq 3 \qquad -1+x \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq 1 \qquad 2-x \neq 0 \rightarrow \; x \neq 2$

Estudiamos el signo

	$-\infty \qquad 1$	2	3	∞
$3-x$	+	+	+	-
$-1+x$	-	+	+	+
$2-x$	+	+	-	-
$\frac{(3-x)(-1+x)}{2-x}$	-	+	-	+

Luego, la solución de este caso particular 1 será: $Solp_1 = (-\infty, 1) \cup (2, 3)$

Por tanto, la solución para este intervalo de estudio viene dado por: $Sol_1 = Solp_1 \cap I_1 = (-\infty, 1)$

Caso 2: $I_1 = [1, 2)$ $\quad \frac{1}{1+x-1} < 2 - x \;\rightarrow\; \frac{1}{x} - (2 - x) < 0 \;\rightarrow\; \frac{1-2x+x^2}{x} < 0$

$$\rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} < 0$$

$x - 1 \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq 1 \qquad\qquad x \neq 0$

Estudiamos el signo

	$-\infty$	0	1 $\quad \infty$
$(x-1)^2$	+	+	+
x	-	+	+
$\frac{(x-1)^2}{x}$	-	+	+

Luego, la solución de este caso particular 2 será: $Solp_2 = (-\infty, 0)$

Por tanto, la solución para este intervalo de estudio viene dado por: $Sol_2 = Solp_2 \cap I_2 = \emptyset$

Caso 3: $I_3 = [2, \infty)$ $\quad \frac{1}{1+x-1} < x - 2 \;\rightarrow\; 0 < x - 2 - \frac{1}{x} \;\rightarrow\; 0 < \frac{x^2-2x-1}{x}$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$x \neq 1 - \sqrt{2} \qquad\qquad x \neq 1 + \sqrt{2} \qquad\qquad x \neq 0$

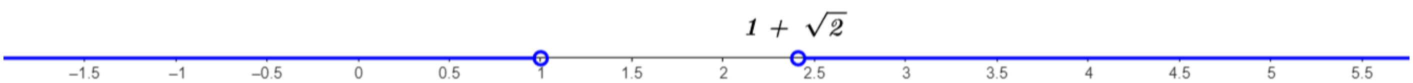
Estudiamos el signo

	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	0	$1+\sqrt{2}$ ∞
x^2-2x-1	+	-	-	+
x	-	-	+	+
$\dfrac{x^2-2x-1}{x}$	-	+	-	+

Luego, la solución de este caso particular 3 será: $Solp_3 = \left(1-\sqrt{2}\ ,\ 0\right) \cup (1+\sqrt{2}\ ,\infty)$

Por tanto, la solución para este intervalo de estudio viene dado por: $Sol_3 = Solp_3 \cap I_3 = (1+\sqrt{2}\,,\infty)$

Luego, **la solución final viene dada por $\boldsymbol{Solf = Sol_1 \cup Sol_2 \cup Sol_3 = (-\infty, 1) \cup (1+\sqrt{2}\,,\infty)}$**



Problema 2. Las ecuaciones de dos circunferencias son

$C_1: x^2+y^2+7x-10y+31=0$ y $C_2: x^2+y^2-x-6y+3=0$. Halle la ecuación de la circunferencia C_3 que ´pasa por las intersecciones de C_1 y C_2 y tiene su centro sobre la recta $L: x-y-2=0$ **6 ptos**

Simplificamos el sistema de ecuaciones conformado por C_1 y C_2 **(Multiplicamos $\boldsymbol{C_2}$ por – 1)**

$$\begin{cases} x^2+y^2+7x-10y+31=0 \\ -x^2-y^2+x+6y-3=0 \end{cases} \rightarrow \quad 8x-4y+28=0 \quad \rightarrow \quad 2x-y+7=0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y=2x+7} \quad (\boldsymbol{A})$$

Evaluamos **(A)** en $\boldsymbol{C_1}$

$$x^2+(\boldsymbol{2x+7})^2+7x-10(\boldsymbol{2x+7})+31=0 \quad \rightarrow \quad x^2+4x^2+28x+49+7x-20x-70+31=0$$

$$5x^2+15x+10=0 \quad \rightarrow \quad x^2+3x+2=0 \quad \rightarrow \quad (x+1)(x+2)=0 \quad \rightarrow \quad x=-1 \quad o \quad x=-2$$

Si $x = -1 \quad \rightarrow \quad y = 2\,(-1) + 7 \quad \rightarrow \quad y = 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Un\ punto\ de\ intersecci\acute{o}n\ es\ A(-1,5)}$

Si $x = -2 \quad \rightarrow \quad y = 2(-2) + 7 \quad \rightarrow \quad y = 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Un\ punto\ de\ intersecci\acute{o}n\ es\ B(-2,3)}$

Por otro lado, nos indican que el centro está sobre la recta de ecuación $L: x - y - 2 = 0$

Para ello consideremos un punto genérico de abscisa $x = a$ sobre la recta L, es decir:

$a - y - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = a - 2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{El\ punto\ gen\acute{e}rico\ tiene\ la\ forma\ C\ (a, a-2)}$

Ahora bien, debe cumplirse que: $\boldsymbol{dist(C,A) = dist(C,B) = r}$

Haciendo uso de la ecuación de la distancia entre dos puntos donde $\boldsymbol{L: x - y - 2 = 0}$, y los puntos $\boldsymbol{A(-1,5)}$ **y** $\boldsymbol{B(-2,3)}$ obtenemos:

$$\boldsymbol{dist(C,A) = \sqrt{(a+1)^2 + (a-2-5)^2} = \sqrt{(a+2)^2 + (a-2-3)^2} = dist(C,B) = r}$$

$$\sqrt{(a+1)^2 + (a-7)^2}^{\,\mathbf{2}} = \sqrt{(a+2)^2 + (a-5)^2}^{\,\mathbf{2}} \quad \rightarrow \quad (a+1)^2 + (a-7)^2 = (a+2)^2 + (a-5)^2$$

$$a^2 + 2a + 1 + a^2 - 14a + 49 = a^2 + 4a + 4 + a^2 - 10a + 25 \quad \rightarrow \quad -12a + 50 = -6a + 29$$

$$12a - 6a = 50 - 29 \quad \rightarrow \quad 6a = 21 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = \frac{7}{2}}$$

Si $\quad x = a = \frac{7}{2} \ \rightarrow \ y = \frac{3}{2}$

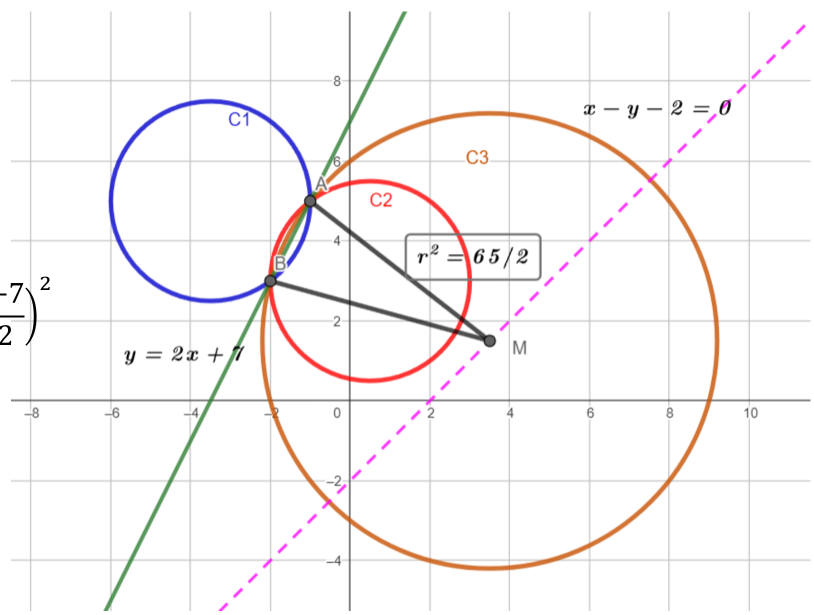
Por ende el centro de la circunferencia se ubica en el punto $\mathbf{M}\left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$

$\boldsymbol{dist(C,A) = \sqrt{(a+1)^2 + (a-7)^2} = r}$

$\rightarrow r^2 = (a+1)^2 + (a-7)^2 \ \rightarrow \ r^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-7}{2}\right)^2$

$r^2 = \frac{81}{4} + \frac{49}{4} \quad \rightarrow \boldsymbol{r^2 = \frac{65}{2}}$

Luego, la ecuación canónica de la circunferencia será:



$$\boldsymbol{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}}$$

Problema 3. Dados los puntos A, B y C donde **A:** Es la intersección de las rectas $L_1: 2x - y + 5 = 0$ y $L_2: 3x + 2y + 4 = 0$ **B:** Es el centro de $x^2 + y^2 - 8x - 14y - 35 = 0$ **C:** Es el vértice de $y^2 + 6y + 8x - 39 = 0$

a. Determine las coordenadas de los puntos A, B y C **1,5 ptos**

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por L_1 y L_2 **(Multiplicamos $\mathbf{L_1}$ por 2)**

$$\begin{cases} 4x - 2y + 10 = 0 \\ 3x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad 7x + 14 = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = -2} \quad \rightarrow \quad 3(-2) + 2y + 4 = 0 \quad \rightarrow 2y = 2 \quad \rightarrow \boldsymbol{y = 1}$$

El punto es $\boldsymbol{A(-2, 1)}$

El centro de $x^2 + y^2 - 8x - 14y - 35 = 0$ **(Completamos Cuadrados)**

$$x^2 + y^2 - 8x - 14y - 35 = 0 \quad \rightarrow \quad (x^2 - 8x + 16) - 16 + (y^2 - 14y + 49) - 49 = 35$$

$$\boldsymbol{(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 100 = 10^2}$$

El punto es $\boldsymbol{B(4, 7)}$

El vértice de $y^2 + 6y + 8x - 39 = 0$ **(Completamos Cuadrados)**

$$(y^2 + 6y + 9) - 9 = -8x + 39 \quad \rightarrow \quad (y + 3)^2 = -8x + 48 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{(y + 3)^2 = 4(-2)(x - 6)}$$

El punto es $\boldsymbol{C(6, -3)}$

b. Determine la distancia del segmento AB **0,5 ptos**

$$\boldsymbol{AB} = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - 7)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

c. Determine la distancia del punto C a la recta AB **1,5 ptos**

Primero hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y B

$$m_{AB} = \frac{7 - 1}{4 - (-2)} = \frac{6}{6} = 1$$

Usamos la ecuación punto pendiente

$y - 7 = 1(x - 4)$ $\rightarrow$ **Recta que pasa por A y B** $\boldsymbol{L_1: x - y + 3 = 0}$

Hacemos uso de la ecuación de la distancia punto recta con $\boldsymbol{L_1: x - y + 3} = 0$ y el punto $\boldsymbol{C(6, -3)}$

$$dist(L_1, C) = \frac{|1(6) + (-1)(-3) + 3|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|6 + 3 + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{12}}{\sqrt{\mathbf{2}}} = \boldsymbol{h}$$

d. Calcule el valor de "y", de tal forma que el punto $P\left(\frac{8}{3}, y\right)$ esté a una distancia de 5 unidades del baricentro del triángulo ΔABC **1,5 ptos**

El baricentro lo determinamos como $\boldsymbol{Br}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

$$\boldsymbol{Br}\left(\frac{-2+4+6}{3}, \frac{1+7-3}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Ahora bien, la distancia de Br al punto P es de 5 unidades, es decir:

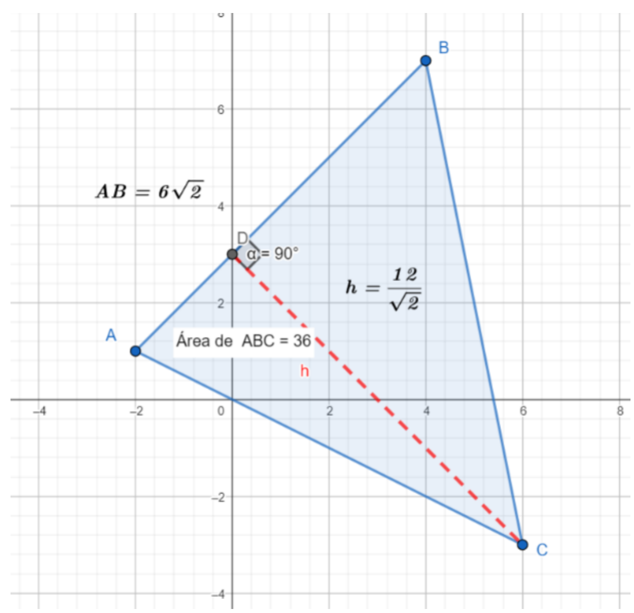
$$dist(Br, P) = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - y\right)^2} = 5 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\left(\frac{5}{3} - y\right)^2} = 5 \quad \rightarrow \left|\frac{5}{3} - y\right| = 5$$

$\frac{5}{3} - y = 5 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{10}{3}$ Una coordena del punto P es $\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}, -\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\right)$

$\frac{5}{3} - y = -5 \quad \rightarrow \quad y = \frac{20}{3}$ Otra coordena del punto P es $\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}}\right)$

e. Calcule el área del triángulo ABC haciendo solo uso del inciso b y c **1 pto**

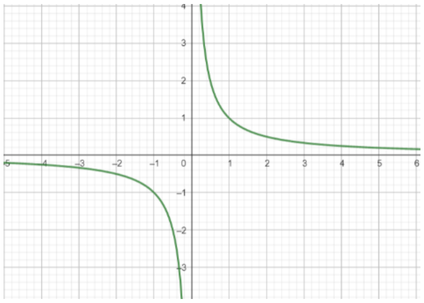
$$\boldsymbol{a}_{\Delta ABC} = \frac{\boldsymbol{AB} * \boldsymbol{h}}{\mathbf{2}} = \frac{6\sqrt{2} * \frac{\mathbf{12}}{\sqrt{\mathbf{2}}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{72}}{\mathbf{2}} = \mathbf{36}$$



Problema 4. Dada la función

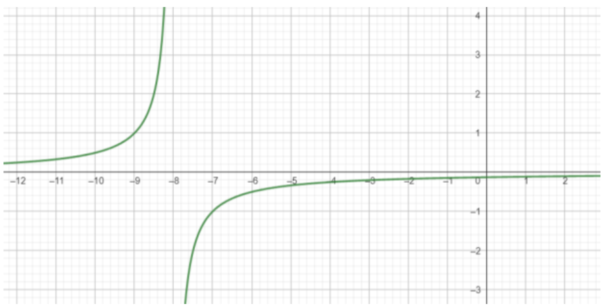
$$f(x) = \begin{cases} 6 - \dfrac{1}{x+8}; & x < -8 \\ \dfrac{3}{2}|x+4| & ; -8 \leq x < -4 \\ \sqrt{8 - x^2 - 2x}; & -4 \leq x \leq 2 \\ 3 + 3cos\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right); & x > 2 \end{cases}$$

a. Represente gráficamente $f(x)$ (Haciendo uso de traslaciones horizontales y verticales, compresiones y estiramientos horizontales y verticales, simetrías) **5 ptos**

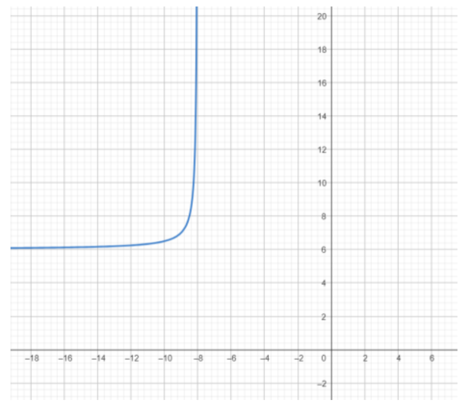


$$f(x) = \frac{1}{x}$$

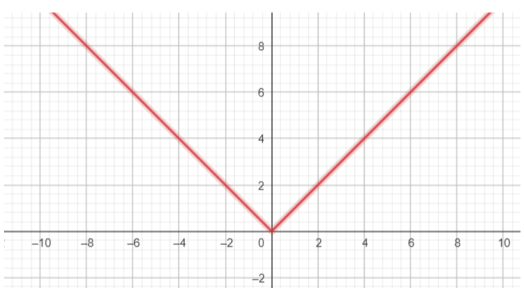
$$f(x) = \frac{1}{x+8}$$



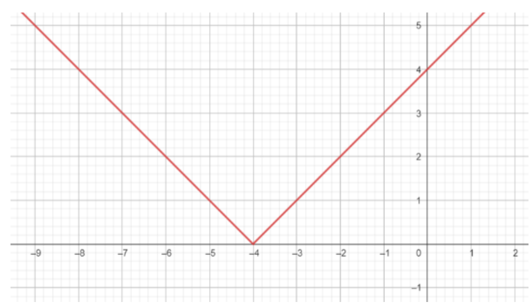
$$f(x) = -\frac{1}{x+8}$$



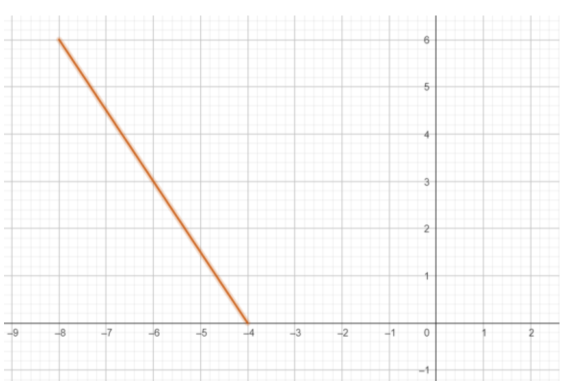
$$f(x) = 6 - \frac{1}{x+8} \qquad x < -8$$



$$f(x) = |x|$$



$$f(x) = |x+4|$$



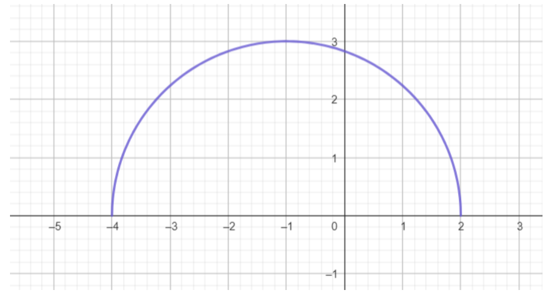
$$f(x) = \frac{3}{2}|x+4| \qquad -8 \leq x < -4$$

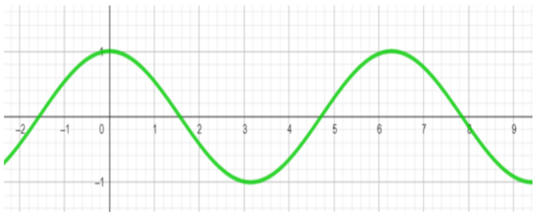
$$y = \sqrt{8 - x^2 - 2x} \quad \rightarrow \quad y^2 = 8 - x^2 - 2x$$

$$\rightarrow (x^2 + 2x + 1) - 1 + (y - 0)^2 = 8$$

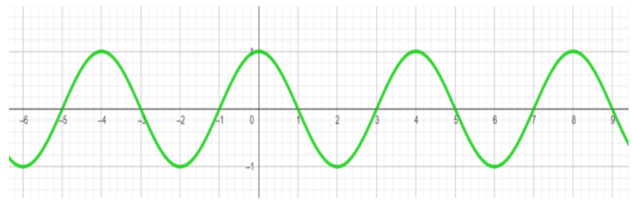
$$\rightarrow (x + 1)^2 + (y - 0)^2 = 9 = 3^2$$

Media Circunferencia “Parte Superior”

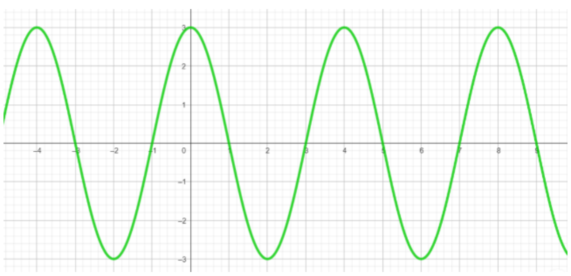




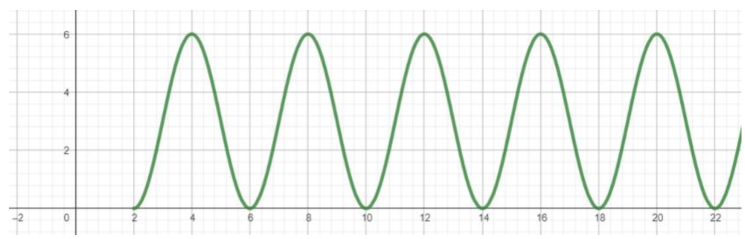
$$\boldsymbol{f(x) = cos(x)}$$



$$\boldsymbol{f(x) = cos\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

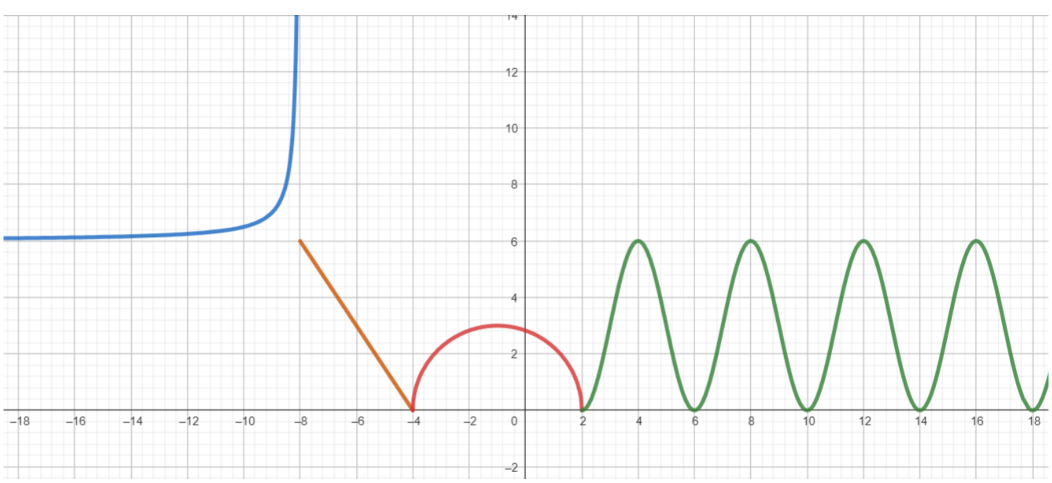


$$\boldsymbol{f(x) = 3cos\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = 3cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$



$$\boldsymbol{f(x) = 3 + 3cos\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = 3 + 3cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad x > 2}$$

Gráfico de f (x)



b. Determine el rango de $f(x)$ **1,5 ptos**

$Rgf(x) = (6,\infty) \cup (0,6] \cup [0,3] \cup [0,6] \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Rgf(x) = y \in [0,\infty)}$

c. Halle $f^{-1}(x)$ para $x < -4$ e indique su dominio y rango **1,5 ptos**

Para la función

$$f(x) = 6 - \frac{1}{x+8} \qquad x < -8 \qquad \rightarrow \qquad (fof^{-1})(x) = x \quad \rightarrow \quad x = 6 - \frac{1}{f^{-1}(x)+8}$$

$$6 - x = \frac{1}{f^{-1}(x)+8} \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x) + 8 = \frac{1}{6-x} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f^{-1}(x) = -8 + \frac{1}{6-x}} \qquad \boldsymbol{x > -6}$$

Para la función

$$\boldsymbol{f}(x) = \tfrac{3}{2}|x+4| \qquad -8 \leq x < -4 \quad \rightarrow \quad (fof^{-1})(x) = x \quad \rightarrow \quad x = -\tfrac{3}{2}(f^{-1}(x)+4)$$

$$-\frac{2}{3}x = f^{-1}(x) + 4 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x - 4} \qquad \boldsymbol{0 < x \leq 6}$$

Por lo tanto, la función inversa para $f(x)$ para $x < -4$ viene dado por

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \boldsymbol{-8 + \dfrac{1}{6-x}} \;, & \boldsymbol{x > 6} \\ \boldsymbol{-\dfrac{2}{3}x - 4} \;, & \boldsymbol{0 < x \leq 6} \end{cases}$$

Donde

$Domf^{-1}(x) = Rgf(x) = [0,\infty)$ y $Rgf^{-1}(x) = Domf(x) = (-\infty,-4)$

d. ¿Es $f(x)$ una función inyectiva en $[-4,2]$ Justifique su respuesta **0,5 pto**

f (x) no es una función inyectiva ya que: $f(-4) = f(2) = 0, \quad siendo -4 \neq 2$

De igual forma por el criterio de la recta horizontal la recta y = 0 intercepta a la función en infinitos puntos

e. Calcule el periodo de $f(x)$ para $x > 2$ **0,5 pto**

Para una función de la forma $\boldsymbol{y = Acos(Bx + C) + D}$ *el período viene dado por* $\boldsymbol{T = \dfrac{2\pi}{B}}$

Entonces, *para* $\boldsymbol{y = 3 + 3cos\left(-\frac{\pi}{2}x\right)}$ *su período será* $\boldsymbol{T = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4}$